

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2015 – 2016 учебном году  
10 класс**

*Время выполнения заданий — 4 часа*

**10.1.** Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что точка  $A(1; 2)$  расположена ниже графика параболы  $y = ax^2 + bx + c$ . Можно ли однозначно установить, как эта точка расположена (выше, ниже или на) по отношению к графику параболы  $y = cx^2 + bx + a$ ? Ответ обосновать.

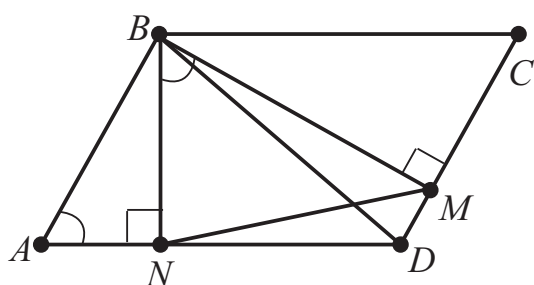
**Решение:** Заметим, что графики обеих парабол пересекаются в точке с абсциссой 1, поэтому любая точка с абсциссой 1 расположена одинаково по отношению к обеим параболам, значит, ответ на вопрос задачи положителен.

**Ответ:** Можно. Точка  $A$  расположена ниже.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                           | баллы    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верный и обоснованный ответ                                                                             | 7 баллов |
| Приведён пример, показывающий, что точка $A$ может лежать ниже, а что не может быть иначе — не доказано | 1 балл   |
| Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)                                                  | 0 баллов |

**10.2.** В параллелограмме  $ABCD$  известны угол  $\angle A = \alpha$  и диагональ  $BD = d$ . Пусть  $M$  и  $N$  — основания высот, опущенных из вершины  $B$  на прямые  $CD$  и  $AD$  соответственно. Найдите  $MN$ .



К решению задачи 10.2

**Решение:** 1) Заметим, что верно равенство  $\angle MBN = \angle BAD = \alpha$ , так как стороны угла  $MBN$  перпендикулярны сторонам угла  $BAD$ .

2) Рассмотрим окружность с диаметром  $BD = d$ . Точки  $M$  и  $N$  лежат на этой окружности, так как  $\angle BMD = \angle BND = 90^\circ$ .

3) По теореме синусов для треугольника  $BMN$  имеем  $\frac{MN}{\sin \angle MBN} = d$ , откуда полу-

чаем, что  $MN = d \sin \alpha$ .

**Ответ:**  $MN = d \sin \alpha$ .

**Примечание:** Утверждение задачи и приведённое решение не зависят от того, лежат ли основания перпендикуляров на сторонах параллелограмма или их продолжениях.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                                          | баллы                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Верный и обоснованный ответ                                                                                                            | 7 баллов                            |
| При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в формулах или в арифметике                                                | 6 баллов                            |
| Доказаны оба факта: а) Четырёхугольник с вершинами $B$ $D$ $M$ $N$ описан; б) $\angle MBN = \alpha$ , но решение не доведено до ответа | 5 баллов                            |
| Доказан один из фактов а) и б) предыдущего пункта                                                                                      | 3 балла                             |
| Верный ответ без обоснования И/ИЛИ разобраны случаи конкретных параллелограммов (например, прямоугольника)                             | 1 балл                              |
| Рассмотрены несколько случаев расположения точек $N$ и $N$ на прямых, содержащих стороны $CD$ и $AD$                                   | оценивается<br>ровно один<br>случай |
| Любые утверждения и/или выкладки, не ведущие к решению                                                                                 | не оцениваются                      |

**10.3.** На доске написано несколько различных действительных чисел. Известно, что сумма любых трех из них рациональна, а сумма любых двух из них — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске? Ответ обосновать.

**Решение:** Набор из трёх чисел  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2} - \sqrt{3}$ , как легко проверить, удовлетворяет условию задачи. Покажем, что на доске не может быть записано более трёх чисел.

Предположим противное, и пусть  $a_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — некоторые четыре числа этого набора. Тогда числа  $a_1 + a_2 + a_3$  и  $a_1 + a_2 + a_4$  — рациональны, поэтому рационально и число  $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_4) = a_3 - a_4$ . Аналогично доказывается рациональность числа  $a_3 - a_2$ . Тогда рационально число  $(a_3 - a_4) + (a_3 - a_2) - (a_2 + a_3 + a_4) = a_3$ . Точно также показывается рациональность всех чисел  $a_i$ . Но тогда сумма любых двух из них рациональна, что противоречит условию задачи.

**Ответ:** Три числа.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                                    | баллы          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Верный и обоснованный ответ                                                                                      | 7 баллов       |
| Имеется верный пример трёх чисел, а в доказательстве (в принципе верном) его оптимальности имеются неточности    | 5 баллов       |
| Верное доказательство, что 4-х чисел быть не может (при отсутствии примера на 3 числа)                           | 3 балла        |
| В верном (в целом) доказательстве, что 4-х чисел быть не может, имеются неточности и примера на 3 числа тоже нет | 2 балла        |
| Приведён пример трёх чисел, но доказательство его оптимальности отсутствует                                      | 1 балл         |
| Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)                                                           | 0 баллов       |
| Доказательство, что чисел меньше 5 (или ещё большего числа)                                                      | не оценивается |

**10.4.** Точку плоскости с координатами  $(x; y)$  разрешено соединить отрезком с точкой, имеющими координаты  $(x + 3y; y)$  или с точкой, имеющей координаты  $(x; y - 2x)$ . Можно ли при таких условиях соединить ломаной точки  $A(19; 47)$  и  $B(12; 17)$ ? Ответ обосновать.

**Решение:** Очевидно, что если координаты начальной точки — числа целые, то и координаты всех последующих точек также будут целыми. Разность абсцисс точек, которые разрешено соединять отрезком, равна либо  $3y$ , либо  $0$  и в обоих случаях делится на  $3$ . Поэтому остаток от деления на  $3$  абсцисс всех получаемых точек одинаков — это есть инвариант задачи. (Другим инвариантом является нечётность ординаты, но рассмотрение этого инварианта к верному ответу привести не может.) Так как  $19$  при делении на  $3$  даёт в остатке  $1$ , а  $12 — 0$ , точки  $A$  и  $B$  ломаной соединить не получится.

**Ответ:** Нельзя.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                               | баллы              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Верный обоснованный ответ                                                                   | 7 баллов           |
| Идея рассмотрения делимости координат точек на фиксированные числа (при отсутствии решения) | 2 балла            |
| Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)                                      | 0 баллов           |
| Отсутствие обоснование целости координат всех рассматриваемых точек                         | балл не понижается |

**10.5.** Пусть  $a, b, c$  и  $d$  — натуральные числа и  $\frac{ad-1}{a+1} + \frac{bd-1}{b+1} + \frac{cd-1}{c+1} = d$ . Найдите все значения, которые может принимать число  $d$ .

**Решение:** Преобразуем уравнение равносильным образом:

$$\begin{aligned}\frac{ad-1}{a+1} + \frac{bd-1}{b+1} + \frac{cd-1}{c+1} &= d \\ d - \frac{d+1}{a+1} + d - \frac{d+1}{b+1} + d - \frac{d+1}{c+1} &= d \\ 2d &= (d+1) \left( \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \\ \frac{2d}{d+1} &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \\ 2 - \frac{2}{d+1} &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \\ \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{2}{d+1} &= 2.\end{aligned}$$

Так как все переменные — суть натуральные числа, каждая из трёх первых дробей левой части не превосходит  $1/2$ . Поэтому для выполнения равенства необходимо условие  $\frac{2}{d+1} \geq 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , откуда  $d \leq 3$ , то есть  $d \in \{1, 2, 3\}$ . Покажем, что все такие значения  $d$  может принимать.

$d = 3$  достигается при  $a = b = c = 1$ . (Других вариантов нет, что доказать несложно, но не требуется.)

$d = 2$  достигается, например, при  $a = b = 1$  и  $c = 2$ . (Есть ещё две тройки, получающиеся из приведённой перестановкой значений неизвестных.)

$d = 1$  возникает в нескольких случаях. Например, при  $c = 6$ ,  $b = 2$ ,  $a = 1$  или при  $b = c = 3$ ,  $a = 1$ . А всего таких случаев 10.

**Ответ:**  $d \in \{1, 2, 3\}$ .

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                     | баллы                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Верный обоснованный ответ                                                                         | 7 баллов                                                     |
| Доказано, что $d \leq 3$ , но не обосновано, что все значения из множества $\{1, 2, 3\}$ возможны | 3–5 баллов в зависимости от количества обоснованных значений |
| Обоснованно найдены все допустимые значения для $d$ , но не доказано, что нет других              | 3 балла                                                      |
| Обоснованно найдены некоторые (не все) допустимые значения для $d$                                | 2 балла                                                      |
| Верный ответ без обоснования                                                                      | 1 балл                                                       |
| Доказательства того, что $d \leq 3$ нет, но есть существенные продвижения в этом направлении      | +1 балл                                                      |

**10.6.** На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 — блондинки. Перед Новым Годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала в «Контакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.

**Решение:** По условию задачи верный список всех 200 блондинок будет в «Контакте» ровно у 17 сотрудниц завода: брюнетки напишут именно его, а блондинка его не напишет никогда, так как в противном случае она должна была бы указать в нём и себя. Значит, если некоторый список встречается не 17 раз, а любое другое количество, то он неверный, и его составила блондинка. Уберём все списки, которые встречаются ровно 17 раз. Останется  $217 - 17n$  списков.  $217 - 17n \geq 0$ , поэтому  $n \leq 12$  (мы помним, что  $n$  — число натуральное). Тогда осталось не менее  $217 - 12 \cdot 17 = 13$  списков, и мы вычислили не менее 13 их авторов-блондинок.

Рекомендации по проверке:

| есть в работе                                                                                        | баллы          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Верное доказательство                                                                                | 7 баллов       |
| Обосновано, что верный список блондинок встречается ровно в 17 списках (без дальнейшего продвижения) | 4 балла        |
| Обосновано, что верный список блондинок встречается хотя бы 17 раз (без дальнейшего продвижения)     | 2 балла        |
| Имеется только идея определять блондинок, как авторов неверных списков                               | 1 балл         |
| Любые идеи, не ведущие к доказательству                                                              | не оцениваются |